Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

CONCOURS BLANC 2022-2023

Épreuve de Mathématiques A

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENTS

L'épreuve est constituée d'un problème d'algèbre (partie 1 et partie 2) et d'un exercice de probabilités indépendant (partie 3).

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les candidats devront utiliser exclusivement un stylo à bille à encre foncée (bleue ou noire) pour la rédaction de leurs compositions. D'autres couleurs peuvent être utilisées dans les schémas. L'usage de stylos à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction, et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le candidat rédigera sur trois copies qu'il intitulera :

- **Mathématiques A-1 (Partie 1)**
- **Mathématiques A-2 (Partie 2)**
- **Mathématiques A-3 (Partie 3)**

et rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches, en mettant son numéro d'anonymat sur les trois copies.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

$\boxed{\text{Partie 1}}$ **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-1.**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Partie 1) A) : Étude d'un exemple en dimension 3

On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
2. Calculer A^2.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Partie 1) B) : un deuxième exemple en dimension 3

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $C = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et on note $f^2 = f \circ f$.

1. La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Donner la matrice de l'endomorphisme f^2 dans la base canonique.
3. Calculer C^4.
4. En déduire la nature de l'endomorphisme f^2 et calculer ses éléments caractéristiques.
5. Les endomorphismes f et f^2 sont-ils diagonalisables sur $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Partie 1) C) : généralités en dimension finie

Dans cette partie f désigne un endomorphisme quelconque d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n avec $n \geqslant 1$.

1. Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, montrer que x est aussi un vecteur propre de f^2.
2. On suppose que f est diagonalisable, montrer que f^2 l'est aussi.
3. La réciproque est-elle vraie ?
   Une réponse argumentée est attendue

Partie 2

À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-2.
Si cette partie n'est pas abordé, le candidat rendra une copie blanche.

On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour un endomorphisme f de E, f^2 désigne toujours $f \circ f$. La notation Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, ses valeurs propres.

   (a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha\beta Id_E).$$

   (b) Montrer que, pour tout vecteur propre v de f, on a
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = 0.$$

   (c) Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. En décomposant x dans une base bien choisie, montrer que
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(x) = 0.$$

3. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0 \quad (\star)$$
   pour des réels α et β distincts.

   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $a(f - \alpha Id_E) + b(f - \beta Id_E) = Id_E$.

   (b) En déduire que $E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E)$.

   (c) Déduire de $(\star)$ que $\operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E)$
   et que $\operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.

   (d) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.

   (e) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.

   (f) En déduire que f est diagonalisable.

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres.

   (a) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note F_k le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_k. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, F_k est stable par f.

   (b) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note f_k la restriction de f à F_k et on pose $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$.
   Montrer que $(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0$.

   (c) En déduire que f_k est diagonalisable.

   (d) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $F_k^+ = \operatorname{Ker}(f_k + \mu_k Id_{F_k})$ et $F_k^- = \operatorname{Ker}(f_k - \mu_k Id_{F_k})$.
   Montrer que
   $$E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.$$
   En déduire que f est diagonalisable.

Partie 3 : exercice de probabilités

À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques A-3.
Si cet exercice n'est pas abordé, le candidat rendra une copie blanche.

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique.
On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$.

Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires. Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
2. Donner l'espérance et la variance de N.
3. Déterminer la loi du couple (N, X).
4. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall x \in]-1,1[: f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
   Donner l'expression de la dérivée $k^{ième}$ de f pour tout $k \geqslant 0$.
   En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.
5. En déduire que la loi de X est donnée par
$$\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}.$$
6. Soit $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.
   (a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).
   (c) Calculer la variance de Y.
7. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.